SOLUCIONARIO DEL EXAMEN FINAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS MB536

Coordinador del curso: Rosa Mercedes Garrido Juárez
Responsables de la elaboración: Rosa Garrido J. – Robert Castro S.– Hermes Pantoja C.

INDICACIONES:

1. *Duración: 110 minutos.*
2. *Verificación inicial: Antes de comenzar, revise que el puntaje total del examen sume 20 puntos. Si encuentras alguna inconsistencia, comuníquelo de inmediato al docente supervisor.*
3. *Escriba solamente con lapicero negro o azul.*
4. *Material permitido: Puede utilizar calculadora científica no programable sin acceso a internet y formulario oficial que se le entregará al inicio del examen.*
5. *Prohibiciones: Está estrictamente prohibido el uso de celulares, medios de comunicación electrónica y calculadoras con conectividad Wi-Fi o Bluetooth.*
6. *Presentación de respuestas: Escriba sus respuestas de forma clara y ordenada. Asegúrese de que cada paso de su razonamiento y cálculo esté debidamente justificado. Las respuestas sin justificación no serán calificadas, aunque el resultado sea correcto.*

PARTE I
P1 (1.0 P)

Se desea resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineal:

$$25x - 2x^2 - 3y^2 - 5 = 0$$
$$20y - 3x^2 - 4y^2 - 8 = 0$$

Se sabe que (1,1) es un valor cercano a la raíz. Obtenga una formulación convergente del método de aproximaciones sucesivas:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = G(\mathbf{X}^{(k)})$$

$\boldsymbol{G(x,y)}$	$\begin{bmatrix} \frac{2x^2+3y^2+5}{25} \\ \frac{3x^2+4y^2+8}{20} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{J_G(x_{0,}y_{0,})}$	$\begin{bmatrix} \frac{4x_{0,}}{25} & \frac{6y_0}{25} \\ \frac{3x_{0,}}{10} & \frac{2y_0}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{L = \|J_G(x_{0,}y_{0,})\|_\infty}$	L=0.7
Conclusión	Converge, dado que $\boldsymbol{L < 1}$

P2. (1.0 P)

Considere el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ e^x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Se sabe que (x_0, y_0) = (0.5, −0.5) es una aproximación inicial cercana a una solución. Para resolver el sistema se empleará el método de Newton-Raphson para sistemas, usando MATLAB. Para ello, se define el vector de funciones mediante una función anónima, se calcula simbólicamente la matriz Jacobiana y se realiza la actualización

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - J_F\left(\mathbf{X}^{(k)}\right)^{-1} F\left(\mathbf{X}^{(k)}\right).$$

Luego de realizar 3 iteraciones, usando norma infinita, calcule también el error relativo aproximado entre las dos últimas iteraciones, definido por:

$$E_r = \frac{\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\|}{\|\mathbf{X}^{(k+1)}\|}.$$

Complete únicamente los espacios en blanco del siguiente código MATLAB:

```
% Definición del vector de funciones no lineales
F = @(x,y) [_x^2 + y^2 - 4;
            exp(x) + y - 1];

% Calculando el Jacobiano
syms x y
J = jacobian(     F    , [x y]);

% Convirtiendo el Jacobiano simbólico a función numérica
Ju_fu = matlabFunction(J);

% Punto semilla
X0 = [__0.5_____; __-0.5_____];

for k = 1:3
    delta = Ju_fu(X0(1),X0(2))\F(X0(1),X0(2));
    X1 = X0 - delta          ;
    error_relativo = norm(X1 - X0)/norm(X1)  ;
    X0 = X1_________________;
end

sol = X0
error_relativo
```

P3 (1.0 P)

En un ensayo de vacío de un generador de corriente continua se mide la fuerza electromotriz (FEM) generada E (V) en función de la corriente de campo I_f (A), en cuatro puntos $I_f = 1,2,3,4$. Un asistente comenzó a construir la **tabla de diferencias divididas,** pero la dejó **incompleta** (¿las casillas con? faltan):

I_f	$E = f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	50			
		30		
2	**80**		−8	
		14		1
3	94		**-5**	
		4		
4	98			

a) (0.4 P) Complete la tabla: determine el valor faltante de E en $I_f = 2$ y las diferencias divididas que faltan. Verifique la consistencia usando el valor dado $f[1,2,3,4] = 1$.

Solución

Valor faltante de E en $I_f = 2$ (paso *hacia atrás* desde la primera diferencia dada):

$$f[1,2] = \frac{E(2) - 50}{2 - 1} = 30 \;\Rightarrow\; E(2) = 50 + 30 = 80 \text{ V}.$$

Diferencias divididas restantes:

$$f[2,3] = \frac{94 - 80}{3 - 2} = 14, \quad f[3,4] = \frac{98 - 94}{4 - 3} = 4, \qquad f[2,3,4] = \frac{f[3,4] - f[2,3]}{4 - 2} = \frac{4 - 14}{2} = -5.$$

Verificación de consistencia con el valor dado:

$$f[1,2,3,4] = \frac{f[2,3,4] - f[1,2,3]}{4 - 1} = \frac{-5 - (-8)}{3} = \frac{3}{3} = 1. \quad \checkmark$$

b) (0.4 P) Dado que $I_f = 2.5$ A se ubica en la parte *inferior* de la tabla, escriba el **polinomio de Newton regresivo** (hacia atrás, empleando la diagonal ascendente que parte del último nodo $I_f = 4$) y estime con él la FEM en $I_f = 2.5$ A.

Solución

La forma **regresiva** parte del último nodo $x = 4$ y usa la diagonal ascendente de la tabla, $\{ f[4] = 98,\ f[3,4] = 4,\ f[2,3,4] = -5,\ f[1,2,3,4] = 1 \}$:

$$p(I_f) = 98 + 4\,(I_f - 4) - 5\,(I_f - 4)(I_f - 3) + 1\,(I_f - 4)(I_f - 3)(I_f - 2).$$

Evaluación en $I_f = 2.5$ (con $I_f - 4 = -1.5,\ I_f - 3 = -0.5,\ I_f - 2 = 0.5$):

$$p(2.5) = 98 + 4(-1.5) - 5(-1.5)(-0.5) + (-1.5)(-0.5)(0.5) = 98 - 6 - 3.75 + 0.375 = 88.625 \text{ V}.$$

Forma expandida equivalente: $P_3\,(I_f) = I_f^3 - 14\,I_f^2 + 65\,I_f - 2.$

c) (0.2 P) El coeficiente principal de la tabla es $f[1,2,3,4] = 1$. Explique qué representa y por qué el polinomio de Newton *regresivo* produce el mismo valor que el *progresivo*, pese a partir de los nodos distintos.

El coeficiente principal $f[1,2,3,4] = 1$ es el **coeficiente de** $P_3(I_f)$ del polinomio interpolante de máximo grado. El polinomio de Newton *regresivo* y el *progresivo* solo difieren en el orden en que se agrupan los mismos nodos y las mismas diferencias divididas, porque por estos nodos solo pasa un único polinomio. (Teorema de la existencia y unicidad)

P4 (1.0 P)

El siguiente script de MATLAB tiene como objetivo procesar un conjunto de puntos discretos (x, y). El estudiante debe completar el código para realizar un ajuste lineal por mínimos cuadrados y, en paralelo, una interpolación por trazadores cúbicos (*splines*). Con el *spline* se requiere aproximar de forma puntual el valor de la función en $x = 2.5$ y, finalmente, generar una gráfica suave de la interpolación junto a los puntos originales.

Completa los espacios indicados con _____ para que el programa se ejecute correctamente de acuerdo con los comentarios.

```
x = [1, 2, 3, 4, 5];
y = [2, 3, 5, 4, 6];

% Obtener los coeficientes del ajuste lineal (polinomio de grado 1)
coef = polyfit (x, y, 1);

% Aproximar el valor en x = 2.5 utilizando Spline cubico
val_interp = spline (x, y, 2.5);

% Crear un vector de 50 puntos distribuidos uniformemente entre 1 y 5
xx = linspace (1, 5, 50);

% Evaluar el spline cubico en el nuevo vector de puntos finos
yy = spline(x, y, xx);

% Graficar los datos originales ('o') y la curva del spline ('-')
plot(x, y, 'o', xx, yy, '-');
```

P5 (1.0 P)

Para aproximar la primera derivada $f'(x_1)$ mediante diferencias finitas con valores igualmente espaciados de paso *h*, se tienen dos fórmulas: una con error de truncamiento $O(h)$ y otra con error de truncamiento $O(h^2)$. Analice la siguiente afirmación:

"Ambas fórmulas tienen el mismo orden de precisión porque aproximan la misma derivada $f'(x_1)$."

Indique si la afirmación es **verdadera** o **falsa**, y justifique brevemente su respuesta.

Solución:

La afirmación es falsa. Aproximar la misma derivada no garantiza el mismo orden. Una fórmula *O(h)* reduce el error aproximadamente a la mitad al dividir *h* entre dos, mientras que una fórmula *O(h²)* lo reduce aproximadamente a la cuarta parte.

P6 (1.0 P)

La corriente que circula por una rama de un circuito, durante un transitorio de $t = 0$ a $t = 2$ s, se modela mediante $i(t) = t^3 - 2t + 1$ (A). Se desea estimar la carga eléctrica transportada,

$$Q = \int_0^2 i\,(t)\,dt = \int_0^2 (\,t^3 - 2t + 1)\,dt \quad \text{(en C)},$$

mediante integración numérica.

a) **(0.3 P)** Defina el grado de exactitud de una regla de cuadratura e indique el de: (i) la regla del trapecio, (ii) la regla de Simpson $1/3$ (Newton–Cotes cerradas) y (iii) la cuadratura de Gauss–Legendre de m nodos. Escriba además el cambio de variable que transforma $\int_a^b g\,(t)\,dt$ al intervalo estándar $[-1,1]$.

Solución

El **grado de exactitud** de una regla de cuadratura es el mayor grado d tal que la regla integra *exactamente* todo polinomio de grado $\leq d$. Se tiene:

(i) Trapecio (2 nodos): grado de exactitud **1**.

(ii) Simpson $1/3$ (3 nodos): grado de exactitud **3** (por simetría gana un grado extra sobre el esperado $n = 2$).
(iii) Gauss–Legendre de m nodos: grado de exactitud $\mathbf{2m - 1}$ (para $m = 2$, grado 3).

Cambio de variable de $[a, b]$ a $[-1,1]$: con $t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,\xi$, $dt = \frac{b-a}{2}\,d\xi$,

$$\int_a^b g\,(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,\xi\right) d\xi \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{m} w_k\; g(t_k).$$

b) **(0.4 P)** Estime Q con la cuadratura de **Gauss–Legendre de 2 nodos** (nodos $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$, pesos $w = 1$).

solución

Gauss–Legendre de 2 nodos

Aquí $a = 0,\ b = 2$, luego $\frac{b-a}{2} = 1$ y $t = 1 + \xi$. Los nodos $\xi = \pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.577350$ se mapean a

$$t_1 = 1 - 0.577350 = 0.422650, \qquad t_2 = 1 + 0.577350 = 1.577350.$$

Evaluando $i(t) = t^3 - 2t + 1$:

$$i(t_1) = 0.422650^3 - 2(0.422650) + 1 = 0.075500 - 0.845300 + 1 = 0.230200,$$

$$i(t_2) = 1.577350^3 - 2(1.577350) + 1 = 3.924500 - 3.154700 + 1 = 1.769800.$$

$$Q_G = \frac{b-a}{2}\,[w_1\, i(t_1) + w_2\, i(t_2)] = 1\,(0.230200 + 1.769800) = 2.000000 \approx 2\ \text{C}.$$

Con nodos exactos $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$ el resultado es *analíticamente exacto*.

c) **(0.3 P)** Estime Q con la regla de **Simpson** $1/3$ (Newton–Cotes, $h = 1$) y con la regla del **trapecio** sobre $[0,2]$. Compare con el valor exacto y explique por qué Gauss–Legendre con solo 2 evaluaciones iguala al resultado exacto.

Solución

I_{Gauss}=2

$I_{Simpson1/3}$=2

$I_{trapecio(h=1)}$=3

Comparación. El integrando es un polinomio de grado 3. Simpson (grado de exactitud 3) y Gauss–Legendre de 2 nodos (grado de exactitud $2m - 1 = 3$) lo integran exactamente; el trapecio (grado de exactitud 1) no y comete un error grande. Lo notable es que Gauss alcanza el resultado exacto con solo 2 evaluaciones, frente a las 3 de Simpson: al poder elegir *también* la posición de los nodos, Gauss duplica aproximadamente el grado de exactitud para el mismo número de puntos.

P7 (1.0 P)

Considere el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = 8xy, \qquad y(1) = 2.$$

Se desea aproximar el valor de $y(1.05)$ utilizando el método de Taylor de orden 3, con un paso de integración $h = 0.05$. Para esta ecuación diferencial, el método de Taylor de orden 3 puede expresarse como:

$$y_{n+1} = y_n + h(ax_n y_n) + h^2(bx_n^2 y_n + cy_n) + \frac{h^3}{3}(dx_n^3 y_n + ex_n y_n).$$

Complete la siguiente tabla:

Parámetro	Valor
a	8
b+c	32+4=36
d+e	256+96=352
y(1.05)	3.009333

P8 (1.0 P)

Considere el siguiente problema de valores en la frontera (PVF):

$$y'' - y' - 2y = 0$$

con las condiciones de frontera: $y(0) = 0.1,\ y(0.5) = 0.283.$

Para resolver este problema se empleará el método del disparo, utilizando la función ode45 de MATLAB para integrar los problemas de valor inicial (PVI) y una interpolación lineal para estimar la pendiente inicial que satisface la condición de frontera.

Complete únicamente los espacios en blanco del siguiente código MATLAB:

```
B=0.283   % El Blanco buscado en t=0.5

fun=@(t,u) [u(2); 2*u(1)+u(2)]; % Sistema EDO de primer orden

s0=0.366   % pendiente inicial 0

[T, Y]=ode45(fun,[0 0.5],[0.1 s0])  % EDO PVI
```

```
yns0=Y(end,1)

s1=0.1547   % pendiente inicial 1

[T, Y]=ode45(fun,[0 0.5],[0.1 s1]) % EDO PVI

yns1=Y(end,1)

p=polyfit([yns0 yns1],[s0 s1],1)  % interpolacion lineal

s2=polyval(p,B)  % pendiente inicial 2

[T, Y]=ode45(fun,[0 0.5],[0.1 s2]) % EDO PVI

yns2=Y(end,1)

err=abs(yns2-B)

plot(T,Y(:,1)) ;grid  % Graficando y(t)
```

PARTE II

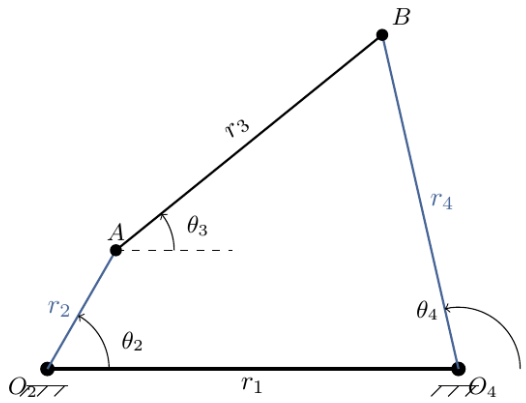
PROBLEMA 1 (4.0 P)

En el diseño de una máquina automatizada se emplea un mecanismo de cuatro barras (manivela–balancín) para transformar el giro de un motor en un movimiento oscilante. Las barras tienen longitudes: eslabón fijo $r_1 = 6$, manivela de entrada $r_2 = 2$, acoplador $r_3 = 5$ y balancín de salida $r_4 = 5$ (unidades consistentes). Con el eslabón fijo sobre el eje horizontal, la ecuación de cierre del lazo vectorial impone:

$$r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 - r_4\cos\theta_4 - r_1 = 0,$$

$$r_2\sin\theta_2 + r_3\sin\theta_3 - r_4\sin\theta_4 = 0.$$

Para una posición de la manivela $\theta_2 = \frac{\pi}{3}\ rad.$ (dato de entrada), se requiere hallar los ángulos del acoplador θ_3 y del balancín θ_4 (en **radianes**) mediante **Newton–Raphson multivariable**.



Mecanismo de cuatro barras: entrada θ_2, salidas θ_3 y θ_4.

a) **(1.0 P)** Formule el problema como un sistema de ecuaciones no lineales de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, donde el vector de incógnitas es $\mathbf{x} = [\theta_3, \theta_4]^T$. Determine analíticamente la expresión general de la matriz Jacobiana $\mathbf{J}_F(\theta_3, \theta_4)$.

Solución

Con $\theta_2 = 60°$ conocido y $\mathbf{x} = [\theta_3, \theta_4]^T$, el sistema $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ es

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 - r_4\cos\theta_4 - r_1 \\ r_2\sin\theta_2 + r_3\sin\theta_3 - r_4\sin\theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es no lineal porque las incógnitas θ_3, θ_4 aparecen dentro de funciones trigonométricas. Derivando respecto de θ_3 y θ_4 (los términos con θ_2, r_1 son constantes):

$$\mathbf{J}_F(\theta_3, \theta_4) = \begin{bmatrix} -r_3\sin\theta_3 & r_4\sin\theta_4 \\ r_3\cos\theta_3 & -r_4\cos\theta_4 \end{bmatrix}.$$

b) **(1.5 P)** Aplique el método de Newton–Raphson. Realice dos iteraciones completas partiendo de la aproximación inicial $\mathrm{x}^{(0)} = [0.5,\ 1.4]^T$ rad. Debe mostrar explícitamente: el vector $\mathrm{F}(\mathrm{x}^{(k)})$, la Jacobiana $\mathrm{J}(\mathrm{x}^{(k)})$, el planteamiento del sistema lineal para hallar $\Delta\mathrm{x}$, el nuevo vector $\mathrm{x}^{(k+1)}$ y una estimación de error usando la norma infinita.

Solución

Dos iteraciones de Newton–Raphson (1.5 P)

Datos: $r_1 = 6,\ r_2 = 2,\ r_3 = r_4 = 5,\ \theta_2 = 60°$, con $r_2\cos\theta_2 - r_1 = 2(0.5) - 6 = -5$ y $r_2\sin\theta_2 = 2(0.866025) = 1.732051$.

Iteración 1. En $\mathbf{x}^{(0)} = [0.5,\ 1.4]^T$ ($\theta_3 = 28.65°,\ \theta_4 = 80.21°$):

$$\mathbf{F}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1.461918 \\ -0.798073 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{(0)} = \begin{bmatrix} -2.397127 & 4.927247 \\ 4.387913 & -0.849836 \end{bmatrix}, \quad \det\mathbf{J}^{(0)} = -19.583.$$

Se resuelve $\mathbf{J}^{(0)}\Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\mathbf{F}^{(0)}$:

$$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.264241 \\ 0.425256 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.764241 \\ 1.825256 \end{bmatrix}, \quad \| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) \|_\infty = 0.35300.$$

Iteración 2. En $\mathbf{x}^{(1)} = [0.764241,\ 1.825256]^T$:

$$\mathbf{F}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.131850 \\ 0.353000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{(1)} = \begin{bmatrix} -3.459950 & 4.839000 \\ 3.609540 & 1.258610 \end{bmatrix}, \quad \det\mathbf{J}^{(1)} = -21.821.$$

$$\Delta\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.085885 \\ -0.034162 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.678356 \\ 1.791094 \end{bmatrix} \text{rad} = \begin{bmatrix} 38.87^\circ \\ 102.62^\circ \end{bmatrix}, \quad \| \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(2)}) \|_\infty = 0.01437.$$

El residuo pasa de $\| \mathbf{F}^{(0)} \|_\infty = 1.46192 \rightarrow 0.35300 \rightarrow 0.01437$: el método converge rápidamente (comportamiento cuadrático cerca de la raíz).

c) (1.5 P) Demuestre algebraicamente que el determinante del Jacobiano se reduce a $\det(\mathbf{J}) = r_3 r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)$. Analice qué sucede con el método numérico si el mecanismo alcanza una posición de punto muerto (eslabones acopladores y balancines colineales). Justifique en términos de estabilidad numérica y significado físico.

Solución

Determinante del Jacobiano y punto muerto (1.5 P)

$$\det(\mathbf{J}) = (-r_3 \sin\theta_3)(-r_4 \cos\theta_4) - (r_4 \sin\theta_4)(r_3 \cos\theta_3) = r_3 r_4 (\sin\theta_3 \cos\theta_4 - \cos\theta_3 \sin\theta_4)$$
$$= r_3 r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4).$$

En $\mathbf{x}^{(2)}$: $r_3 r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) = 25 \sin(0.678 - 1.791) = 25 \sin(-1.113) = -22.4$, no singular.

Punto muerto. El Jacobiano es singular ($\det\mathrm{J} = 0$) cuando $\sin(\theta_3 - \theta_4) = 0$, es decir $\theta_3 = \theta_4$ o $\theta_3 = \theta_4 \pm \pi$: el acoplador y el balancín quedan colineales. Esta es una posición de punto muerto (*toggle*) del mecanismo.

Estabilidad numérica: al aproximarse a esa configuración, $\det\mathrm{J} \rightarrow 0$, la Jacobiana se vuelve mal condicionada; el sistema lineal $\mathrm{J}\,\Delta\mathrm{x} = -\mathrm{F}$ amplifica errores y el paso $\Delta\mathrm{x} = \mathrm{J}^{-1}(-\mathrm{F})$ se dispara, de modo que Newton–Raphson puede oscilar, dar saltos enormes o diverger. Conviene detectar $|\det\mathrm{J}|$ o el número de condición y, si es pequeño, cambiar de rama de solución o de estimación inicial.

Problema 2 (4.0 P)

En un estudio de mantenimiento predictivo se desea modelar el tiempo hasta la falla de un conjunto de rodamientos mediante la distribución de Weibull, cuya función de distribución acumulada está dada por:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}},$$

donde t representa el tiempo de operación (horas), β es el parámetro de forma y η es el parámetro de escala.

Se dispone de los siguientes datos experimentales:

t (horas)	200	350	500	700	900
F(t)	0.1	0.25	0.45	0.7	0.9

Se pide:

a) **(1.5 P)** A partir de la ecuación de la distribución de Weibull, determine las variables $X\ e\ Y$ que permiten transformarla en una ecuación lineal de la forma: $Y = aX + b$.

b) **(1.0 P)** Utilizando el método de mínimos cuadrados, determine la ecuación de la recta de mejor ajuste.

c) **(0.5 P)** Identifique el valor del parámetro de forma β y el parámetro de escala η, comente los valores obtenidos.

d) **(1.0 P)** Determine el factor de regresión R^2 e interprete la calidad del ajuste obtenido.

Solución

a) Linealización de la distribución de Weibull

Partimos de $F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$

Despejando, $1 - F = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$

Aplicando logaritmo natural, $\ln(1 - F) = -\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$

Multiplicando por -1, $\quad -\ln(1 - F) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$

Aplicando nuevamente logaritmo natural, $\ln[-\ln(1 - F)] = \ln\left[\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]$

Utilizando las propiedades de los logaritmos, $ln[-ln(1 - F)] = \beta ln(t) - \beta ln(\eta)$

Comparando con la ecuación de una recta, $Y = aX + b$,

se obtiene

$$X = \ln(t)$$
$$Y = \ln[-\ln(1-F)$$

Además,

$$a = \beta$$
$$b = -\beta\ln(\eta)$$

b) Completando la tabla

t	$F(t)$	$X = \ln(t)$	$Y = \ln[-\ln(1-F)]$
200	0.10	5.2983	-2.2504
350	0.25	5.8579	-1.2459
500	0.45	6.2146	-0.5144
700	0.70	6.5511	0.1856
900	0.90	6.8024	0.8340

Ajuste por mínimos cuadrados
La recta buscada es $Y = aX + b$.

$$\begin{bmatrix} \sum X^2 & \sum X \\ \sum X & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum XY \\ \sum X^2 Y \end{bmatrix}$$

a=2.0343
b=-13.0988

$$Y = 2.0343X - 13.0988$$

c) Determinación del parámetro de forma
Como $Y = \beta X - \beta\ln(\eta)$, la pendiente representa el parámetro de forma.
Por tanto, $\beta = 2.0343$
η =625.97 horas
Además, $\beta = 2.03 > 1$, lo que indica una tasa de falla creciente, característica de la etapa de desgaste de los rodamientos.
El parámetro de escala., $\eta \approx 626$ horas, representa la vida característica del componente, es decir, el tiempo para el cual aproximadamente el 63.2 % de los rodamientos habrá fallado.

Factor de regresión: $R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_i - y_m)^2}{\sum(y_i - y_m)^2}$=0.9965

El valor $R^2 = 0.9965$ indica que el 99.65 % de la variabilidad de los datos es explicada por el modelo lineal, por lo que la linealización de Weibull representa adecuadamente el comportamiento experimental.

Problema3 (4.0 P)

En un sistema de transmisión mecánica, un eje esbelto de longitud $L = 5$ m está sometido a una tensión axial constante *T* y a una carga transversal distribuida uniforme q_0. Para pequeñas deflexiones, se asume un modelo lineal en el que *y(x)* representa la deflexión transversal del eje, medida en metros, en la posición axial *x*. El equilibrio transversal lineal del eje se modela mediante la ecuación diferencial:

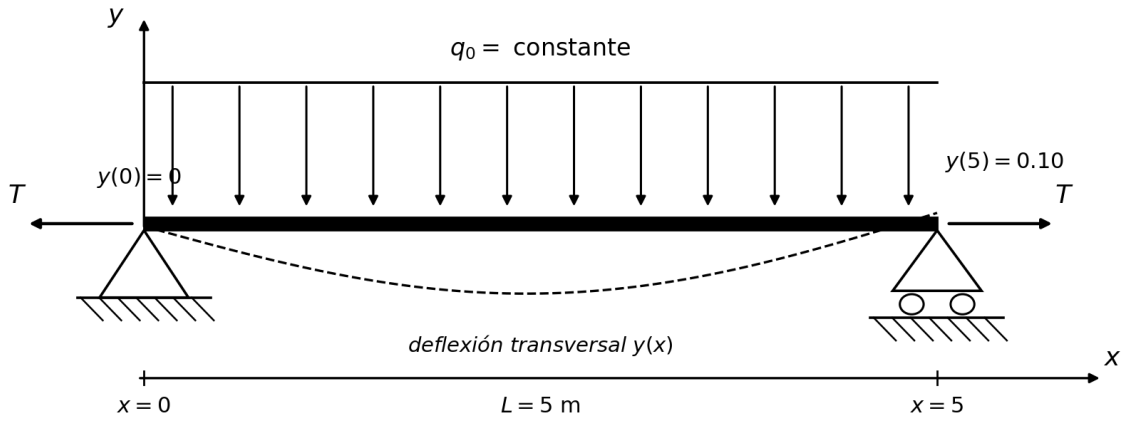
$$T\,y''(x) - k\,y(x) = -q_0, \qquad 0 \le x \le 5$$

donde *T* es la tensión axial constante, *k* es un parámetro lineal de rigidez transversal equivalente y q_0 es la carga distribuida uniforme. Para este caso, se consideran los parámetros normalizados:

$$\frac{k}{T} = 0.04, \qquad \frac{q_0}{T} = 0.02$$

sujeto a las condiciones de frontera:

$$y(0) = 0, \qquad y(5) = 0.10$$



La solución analítica exacta del sistema indica:

$$y(2.5) = 0.1009315022$$

Se solicita:

a) (1.5 P) Método de Heun como PVI: Transforme la ecuación diferencial dada en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Luego, utilizando la pendiente inicial $y'(0) = 0.06323$, aproxime la solución mediante el método de Heun con tamaño de paso $h = 2.5$, en los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 5$.

b) (1.5 P) Diferencias finitas: Resuelva el PVF mediante diferencias finitas centradas de segundo orden usando 3 nodos interiores, con $h = 1.25$.

c) (1.0 P) Cálculo de error: Calcule el error relativo porcentual de las aproximaciones de $y(2.5)$ obtenidas en los ítems b) y c), tomando como referencia la solución analítica. Con base en estos errores, determine cuál de los dos métodos proporciona una mejor aproximación en $x = 2.5$.

Solución

Con $u_1 = y$, $u_2 = y'$:

$$u_1{}' = u_2, \qquad u_2{}' = 0.04u_1 - 0.02.$$

Heun: con $h = 2.5$, $\mathbf{u}_0 = [0, 0.06323]^T$, se obtiene

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0.095575 \\ 0.02113375 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0.09785625 \\ -0.01666703 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $y(2.5) \approx 0.095575$.

Diferencias finitas: usando

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - 0.04y_i = -0.02,$$

con $h = 1.25$, el sistema es

$$\begin{bmatrix} -1.32 & 0.64 & 0 \\ 0.64 & -1.32 & 0.64 \\ 0 & 0.64 & -1.32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.02 \\ -0.084 \end{bmatrix}.$$

La solución es

$$y_1 = 0.0639725, \qquad y_2 = 0.1006932, \qquad y_3 = 0.1124573.$$

Así, $y(2.5) \approx 0.1006932$. Con $y_{\text{exacto}}(2.5) = 0.1009315022$:

$$E_{\text{Heun}} = 5.307\%, \qquad E_{\text{DF}} = 0.236\%.$$

Por ello, diferencias finitas proporciona la mejor aproximación en $x = 2.5$.